Spieltheorie

oder wie man interdependente Entscheidungen analysieren kann

Prof. Dr. Arnis Vilks

HHL Leipzig Graduate School of Management

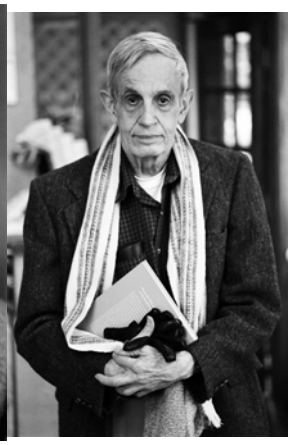
Themen

1. Ein wenig Geschichte
2. Was ist ein „Spiel“?
3. Das Gefangenendilemma
4. Das Nash-Gleichgewicht
5. Ein Markteintrittsspiel

Drei Gründerväter der Spieltheorie

Ernst Zermelo

John von Neumann



John Nash

Frühgeschichte

- Ernst Zermelo (1871-1953) bewies 1913 das erste Theorem der Spielteorie: Würde Schach von völlig rationalen Spielern optimal gespielt werden, würde immer Weiß gewinnen, oder immer Schwarz, oder es würde immer Remis enden.
- John von Neumann (1903-1957)
  - bewies 1928 das sogenannte “Minimax-Theorem” über Zwei-Personen-Nullsummenspiele,
  - veröffentlichte 1944 mit Oskar Morgenstern “The Theory of Games and Economic Behavior”.
- John Nash (1928-2015) definierte 1950 einen (später nach ihm benannten) Gleichgewichtsbegriff und bewies, dass es für jedes endliche Spiel ein solches Gleichgewicht geben muss.

Was ist ein Spiel?

In der Spieltheorie ist ein Spiel eine Situation mit "strategischer Interdependenz" von Entscheidungen:

Die "Auszahlung" (= "Nutzen") den ein Spieler erhält, hängt nicht nur von seiner Entscheidung ab, sondern auch von den Entscheidungen der anderen Spieler.

Beschreibung eines Spiels

...erfordert Klarheit über:

- *Die Spieler*: Wer nimmt am Spiel teil? Spieler können sein:
  - Personen (wie im Poker oder Schach),
  - Unternehmen (z.B. in oligopolistischen Märkten),
  - ganze Nationen (z.B. in internationalen Konflikten).
- *Die Spielregeln:* Welche Züge sind möglich? Wann ist wer am Zug? Welche Informationen haben die Spieler?
- *Die Spielergebnisse:* Für jeden möglichen Spielverlauf: was ist das Ergebnis?
- *Die Auszahlungen:* Wie bewerten die Spieler die möglichen Ergebnisse?

Statische Spiele

... sind besonders einfach: Alle Spieler machen nur einen Zug – und zwar gleichzeitig.

Statische zwei-Personen-Spiele können daher in einer Matrix dargestellt werden.

Dynamische Spiele werden oft besser durch Spielbäume dargestellt.

Das Gefangenendilemma (1)

- Zwei Verdächtige namens *A* und *B* sitzen in getrennten Zellen in Untersuchungshaft. Der Staatsanwalt ist überzeugt, dass sie eine Bank überfallen haben, hat aber keine ausreichenden Beweise. Sie könnten nur aufgrund eines Geständnisses verurteilt werden.
- Der Staatsanwalt klärt die beiden jedoch darüber auf, dass, wenn nur einer von beiden den gemeinsamen Überfall gesteht, er als Kronzeuge freigelassen wird, während der andere die Höchststrafe von 15 Jahren Gefängnis erhält.
- Wenn beide gestehen, werden beide zu 10 Jahren verurteilt.
- Wen keiner von beiden gesteht, können sie nur wegen illegalen Waffenbesitzes verurteilt werden – darauf steht nur 1 Jahr Gefängnis.

Das Gefangenendilemma (2)

Das Spiel kann durch folgende Matrix beschrieben werden:

A \ B	G	S
G	-10; -10	0; -15
S	-15; 0	-1; -1

"Gestehen" ist eine "dominante" Strategie für *A*: In jedem Falle kommt A besser weg, wenn er G wählt, als wenn er "Schweigen" S wählt.

Das Gefangenendilemma (3)

Für B ist "Gestehen" aber ebenfalls die dominante Strategie:

A \ B	G	S
G	-10; -10	0; -15
S	-15; 0	-1; -1

Beide werden *"Gestehen"* wählen – und für 10 Jahre ins Gefängnis wandern.

Das Nash-Gleichgewicht

Eine Strategie-Kombination, die aus wechselseitig besten Antworten besteht, heißt Nash-Gleichgewicht.

Im Gefangenen-Dilemma ist (G,G) ein solches Gleichgewicht, weil “Gestehen” für beide die beste Antwort auf “Gestehen” durch den Gegenspieler ist.

Preiskampf zwischen Duopolisten

A \ B	Niedriger Preis	Hoher Preis
Niedriger Preis	0, 0	50, -10
Hoher Preis	-10, 50	10, 10

Ein Nash-Gleichgewicht (in dominanten Strategien) liegt nur vor, wenn beide den “Niedrigen Preis” wählen.

Die Auszahlungen im Nash-Gleichgewicht sind für beide Spieler geringer als wenn beide “Hoher Preis” gewählt hätten: ein Dilemma.

Links oder Rechts fahren?

A \ B	Links	Rechts
Links	1, 1	-1, -1
Rechts	-1, -1	1, 1

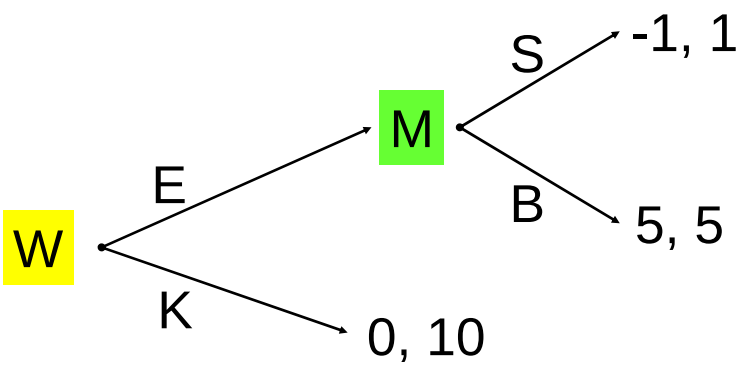
In diesem Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte: beide fahren links oder beide rechts.

Nicht nur Konflikte, sondern auch Kooperationen und Konventionen können als Nash-Gleichgewichte verstanden werden.

Markteintritt oder nicht? (1)

- Zwei Firmen: bisheriger Monopolist M und möglicher Wettbewerber W.
- Zunächst entscheidet W zwischen:
  - Markteintritt (E)
  - Kein Markteintritt (K).
- Nach Markteintritt durch W muss M entscheiden zwischen:
  - Starke Preissenkung (S)
  - Bisheriger Preis (B)

Markteintritt oder nicht? (2)



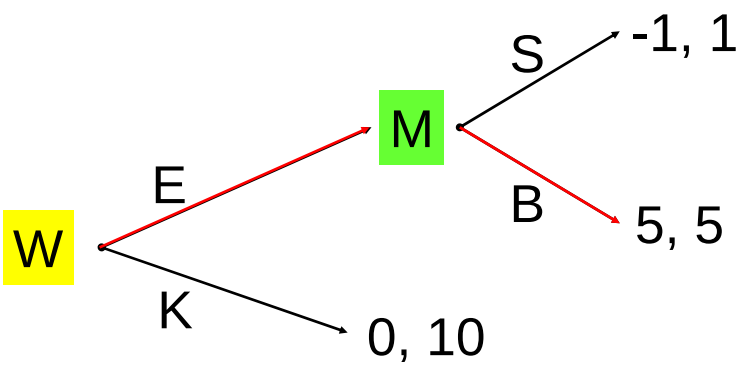
Markteintritt oder nicht? (3)

Das Spiel kann auch durch eine Matrix beschrieben werden:

W \ M	S	B
E	-1; 1	5; 5
K	0; 10	0; 10

Sowohl (E,B) als auch (K,S) bestehen aus wechselseitig besten Antworten – es sind Nash-Gleichgewichte.

Markteintritt oder nicht? (4)



Nur in (E,B) spielt M in jedem Teilspiel rational.
(K,S) beruht auf einer unglaubwürdigen Drohung.

Die UMTS Auktion

Im Jahre 2000 wurden in Deutschland in einer mehrstufigen Auktion UMTS Lizenzen versteigert. Am 12. August gab es sechs aktive Bieter, die jeweils Gebote von 10 Mrd. DM abgegeben hatten. Alle erhöhten ihre Gebote mehrfach. Am 17. August endete die Auktion und alle sechs Bieter erhielten eine Lizenz für ein Gebot von 16 Mrd. DM.

Eine vereinfachte Auktion (1)

Zwei Unternehme geben verdeckte Gebote für eine Lizenz ab. Ist ein Gebot höher als das andere, erhält nur das meistbietende Unternehmen eine Lizenz – und wird Monopolist auf einem Markt, der 20 Mrd. wert ist. Der unterlegene Bieter macht dann einen Verlust von 1 Mrd. Gleich hohe Gebote führen zu einem Duopolmarkt – der für jeden Duopolisten 10 Mrd. wert ist. Nur die Gebote 8, 9, oder 10 Mrd. sind erlaubt. Wenn ein Bieter eine Lizenz erhält, ist ihre Nettoauszahlung gleich dem Wet ihres Marktes abzüglich ihres Gebots.

Eine vereinfachte Auktion (2)

Wert des Monopols: 20.
Wert des Duopols: 10 für jeden Duopolisten.
One Lizenz resultiert ein Verlust von 1.
Nur die Gebote 8, 9, und 10 sind zulässig.

2 / 1	10	9	8
10	0,0	10,-1	10,-1
9	-1,10	1,1	11,-1
8	-1,10	-1,11	2,2

Vielen Dank
für Ihre Aufmerksamkeit!